A. Bianchi, C. Cuomo, G. Curti, D. Lentini, N. Magnani,
R. Vagni

A CURA DI DENISE LENTINI

Doremat - La Musica della Matematica Il Testo

Insegnare e imparare la Matematica con la Musica

collana Risorse Didattiche Digitali

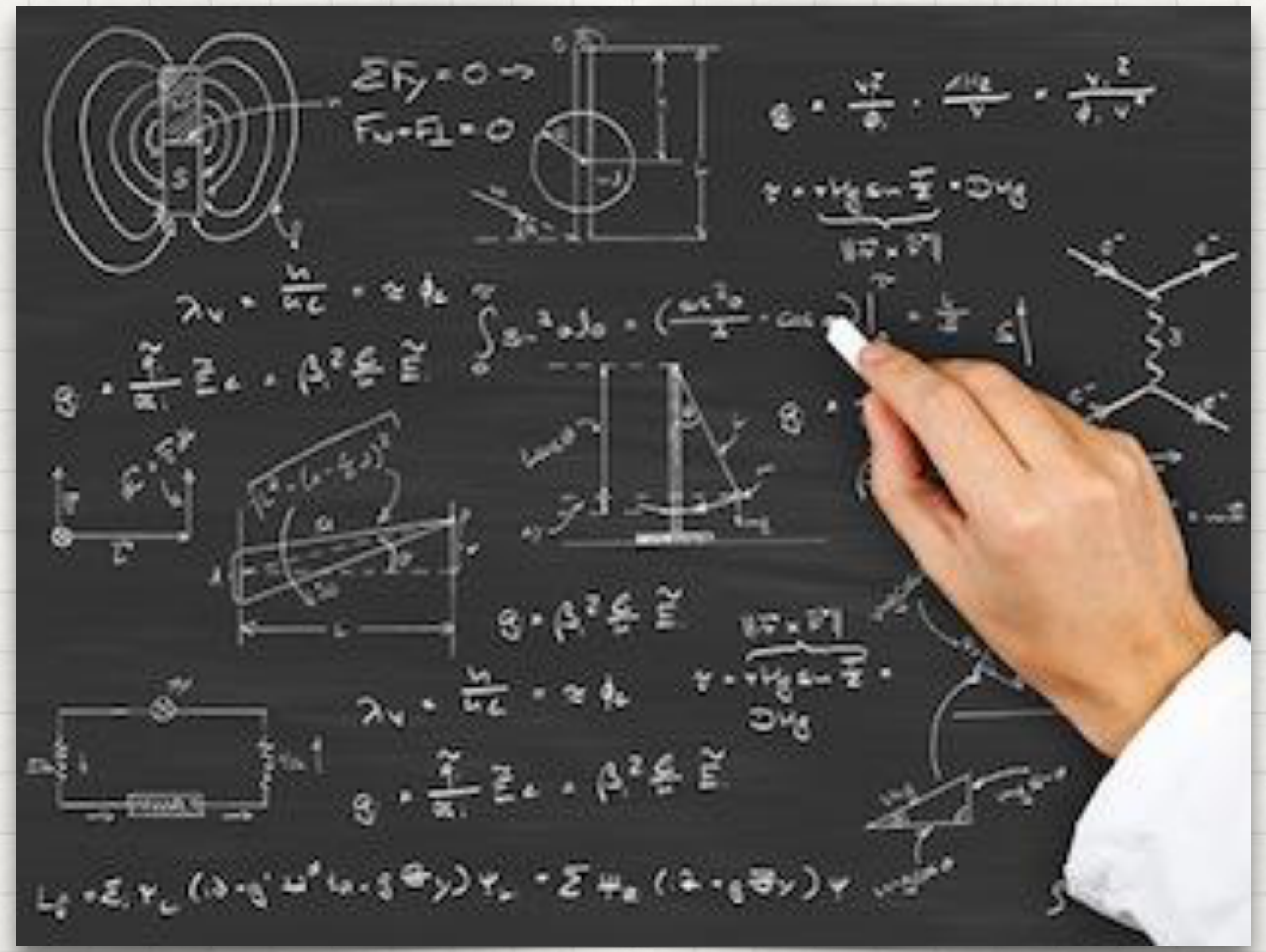
DIGITAL DOCET

Due discipline che usano simboli (pressoché) universali per esprimere dei significati e hanno una comune matrice culturale

Se si considera il processo formativo di un individuo, nell’arco della sua istruzione dalla scuola primaria alla scuola secondaria di secondo grado, la matematica è la sola materia scientifica che viene trattata progressivamente e con continuità.

Pertanto, rappresenta un particolare paradosso: da un lato, è la materia “ostica” per eccellenza e, come sottolinea Ocse Pisa, tale disciplina rappresenta la prima causa dell’abbandono scolastico, dall’altro, è l’unica materia curriculare costante su cui l’allievo può maturare un pensiero scientifico.

Un pensiero scientifico che risulta fondamentale per la crescita consapevole dei giovani, poiché consolida l'atteggiamento del chiedersi il perché delle cose che, attraverso la matematizzazione e la modellizzazione, forma al saper esaminare "quei" legami complessi che caratterizzano le realtà, i diversi mondi che viviamo, le nostre società contemporanee.



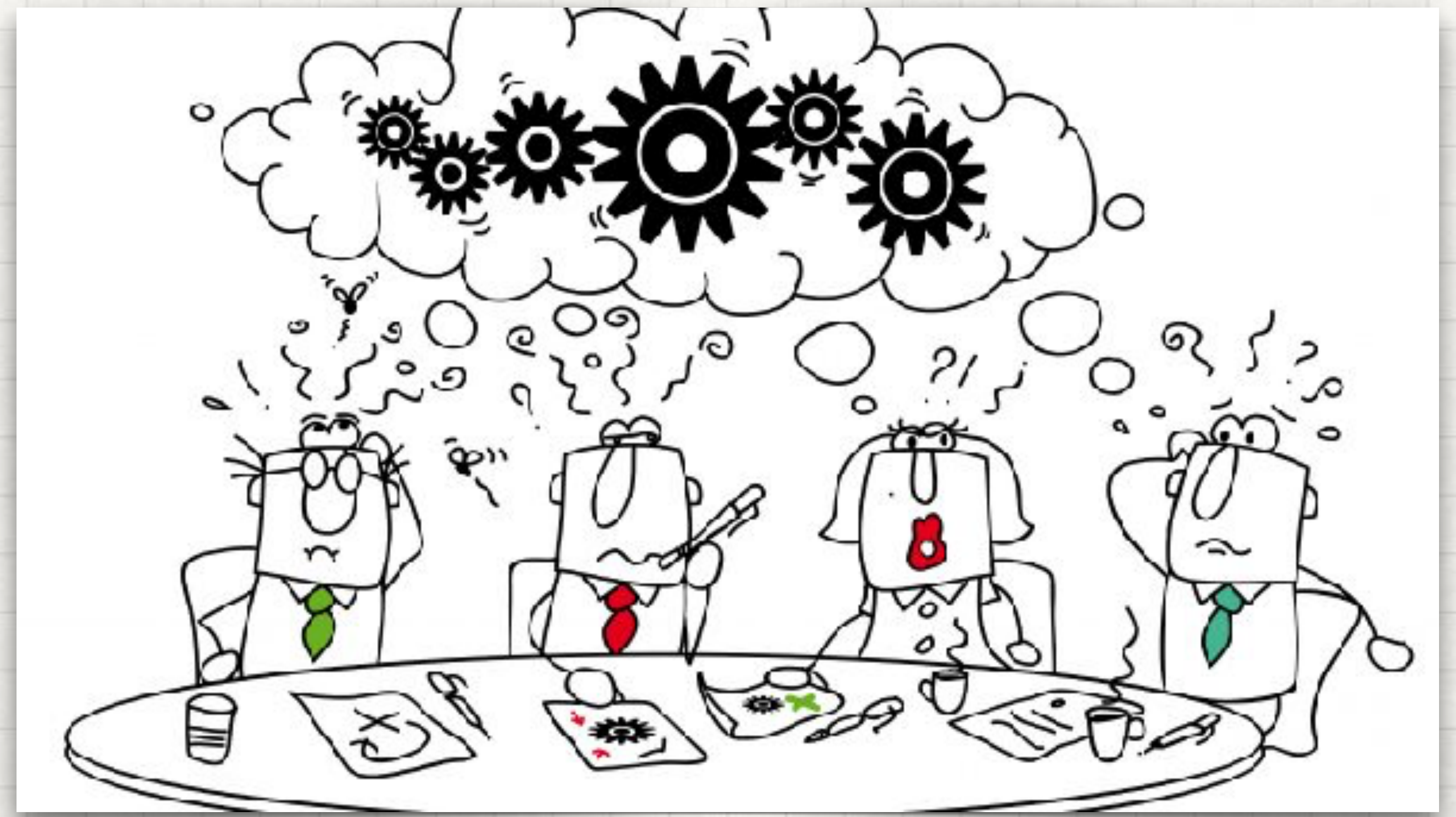
Il cuore del metodo Doremat è l'attività laboratoriale.

Doremat prevede per ogni argomento matematico un vero e proprio laboratorio matematico-musicale, attraverso e nel quale gli studenti ascoltano, apprendono, si esprimono, si esercitano e inventano. Il laboratorio è luogo di interazione, dove l'allievo può mettere alla prova se stesso, le proprie capacità e il proprio modo di esperire la realtà.

Questo perché «la musica è essenzialmente cultura, sapere reticolare, interdisciplinare, capace d'illuminare gli altri saperi, dai quali, a sua volta riceve continuamente luce» (La Face Bianconi, 2008).

Grazie alla sua natura intrinseca, quindi, la musica si connota come disciplina particolarmente adatta alla didattica laboratoriale, come descritta poco sopra.

Doremat utilizza il problem solving come metodo dell'apprendimento matematico: invece di iniziare la trattazione di un argomento con definizioni, enunciati di teoremi e proposizioni, si parte da una situazione problematica, dalla quale è possibile scoprire, inventare e ricostruire concetti matematici. È l'alunno che compie queste azioni con la guida dei docenti.



Nel caso specifico, il compito di potente stimolo all'interesse e alla motivazione degli studenti viene svolto dalla musica. Le lezioni musicali, inoltre, costituiscono l'ambiente da cui attingere situazioni che gli allievi devono poi problematizzare scientificamente.

Poiché i concetti della matematica non esistono nella realtà fisica (i poligoni, i numeri, per esempio 1, 3, 1/2, le operazioni..., sono costruzioni mentali di oggetti e strutture astratte), accade che di un concetto matematico possediamo una sua rappresentazione.

Così, per esempio, 1/2 e "la metà" sono due rappresentazioni (rispettivamente nel registro aritmetico e in quello linguistico) dello stesso concetto, così come, in Doremat, una figura musicale.

Questo processo di astrazione nello studente deve partire dall'esperienza; è un processo che consiste nel cogliere delle somiglianze, delle proprietà, delle equivalenze per arrivare alla costruzione di un concetto.

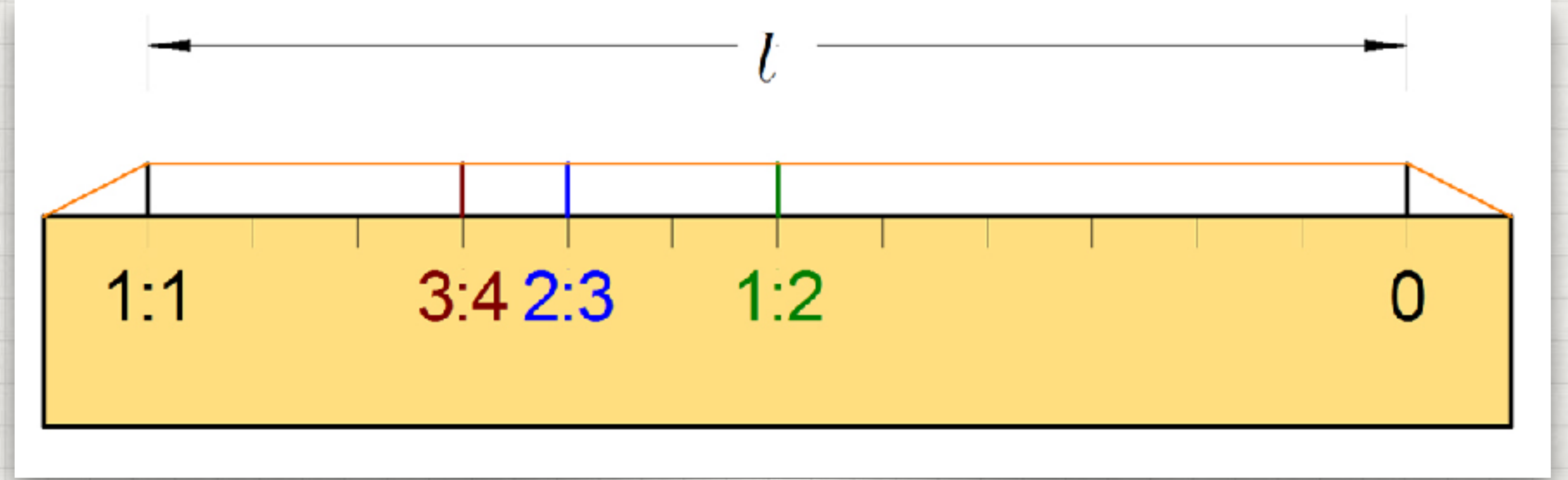
È inoltre interessante sottolineare che un costrutto di cui Doremat si serve, sia nella fase di elaborazione stessa del metodo, sia nell'insegnamento, è la metafora.

«Il processo del fare scienza è narrativo. Consiste nel produrre ipotesi sulla natura, nel verificarle, correggerle e rimettere ordine nelle idee. Nel corso della produzione di ipotesi verificabili giochiamo con le idee, cerchiamo di creare anomalie, cerchiamo di trovare belle formulazioni da applicare alle contrarietà più intrattabili in modo da poterle trasformare in problemi solubili, inventiamo trucchi per aggirare le situazioni intricate» (Bruner, 2001).

Molti autori in diverse opere sostengono come le metafore siano un potente strumento di pensiero, una parte centrale del pensiero matematico, in quanto il loro utilizzo richiede sia il saper cogliere analogie in situazioni diverse, sia il saper applicare ad un nuovo contesto proprietà che sono tipiche di un altro contesto, noto, più familiare. Se si padroneggiano queste due operazioni, l'accesso al pensiero scientifico risulta facilitato.

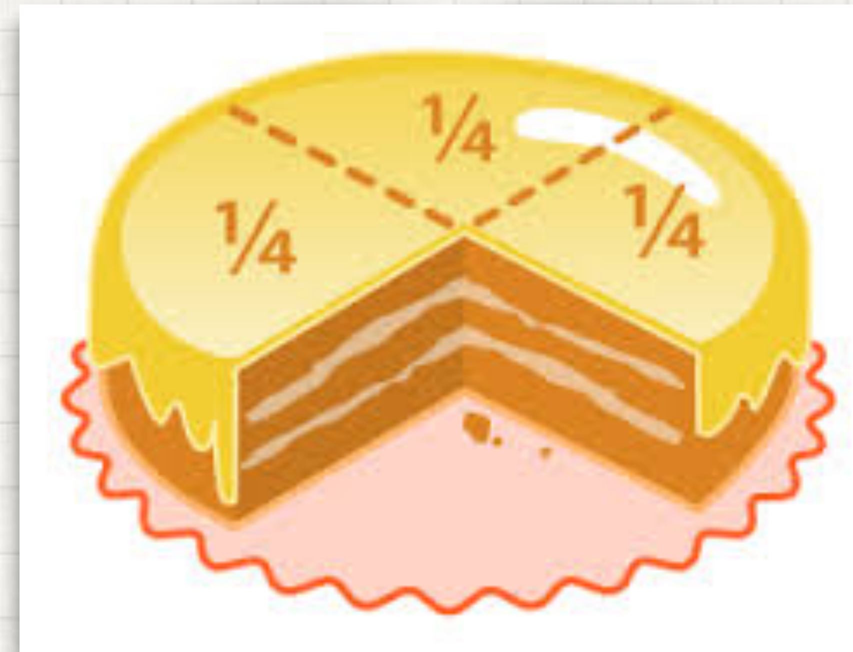
Esempi di indagine musico-matematica

Esperienza sul monocordo, che ha anche come sfondo un episodio storico: l’esperienza pitagorica della costruzione della scala musicale e l’esperienza musicale di costruzione del moto contrario.
Analisi del concetto di struttura, trasversale a molte discipline, in particolare alla musica e alla matematica. Per poter leggere la realtà, interpretarla, modellizzarla, agire su di essa, lo studente deve saper padroneggiare le strutture matematiche. Il concetto di struttura è presente anche nella musica.



È importante osservare che le competenze che si vogliono perseguire non si esauriscono nel sapere disciplinare, ma coinvolgono competenze matematiche trasversali, quali ad esempio: inventare; porre in relazione, stabilendo legami tra fatti, dati e termini; rappresentare, scegliendo forme di presentazione simbolica per rendere evidenti relazioni esistenti tra tali fatti, dati, termini; generalizzare, individuando regolarità e proprietà in contesti diversi.

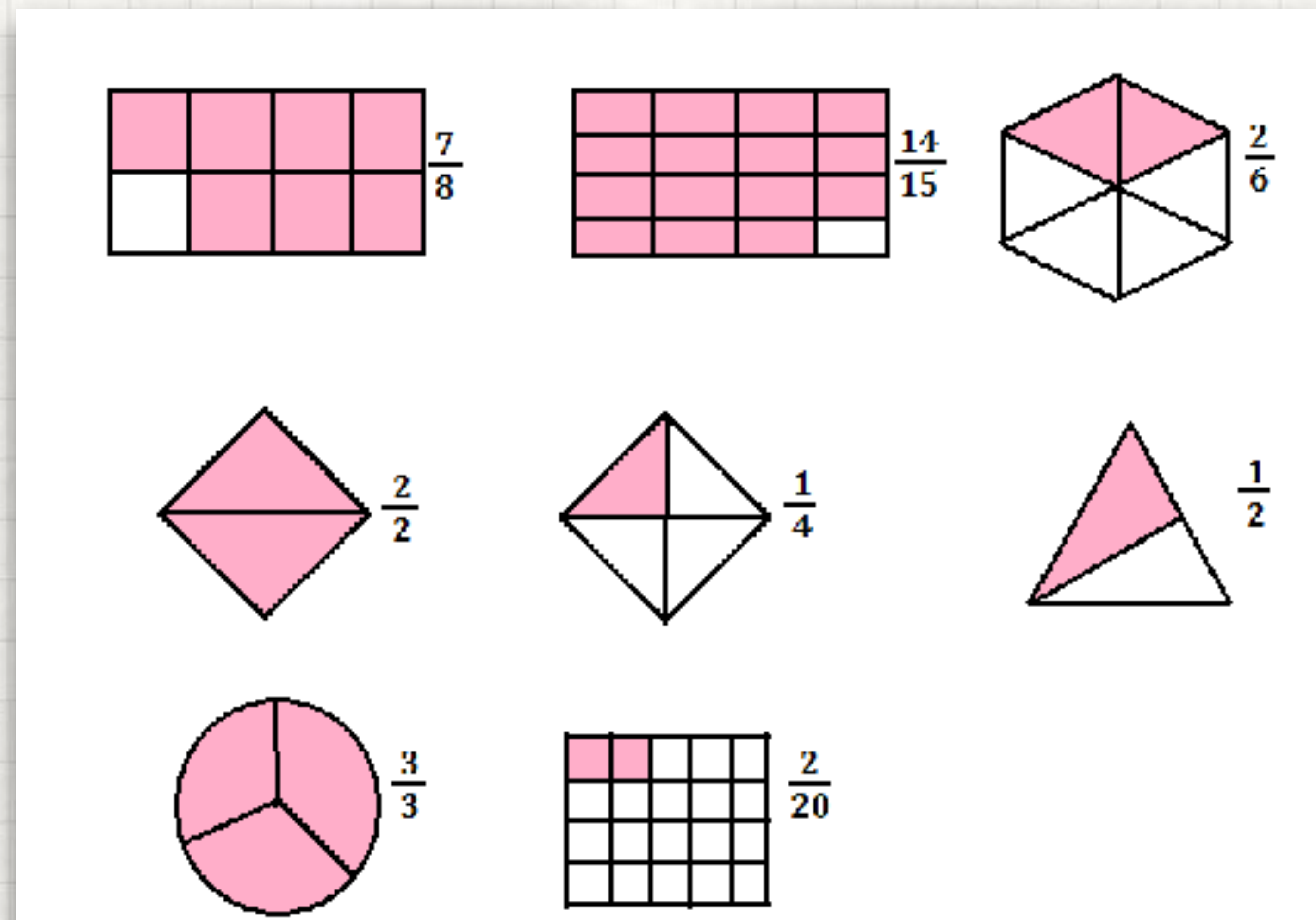
I concetti necessari per il raggiungimenti degli obiettivi e l'acquisizione delle competenze suddetti, proposti separatamente in ogni paragrafo, sono: gli insiemi con le rispettive operazioni; la frazione e i suoi diversi significati; le espressioni; le equazioni lineari; i sistemi di equazioni lineari; la percentuale e i rapporti; la proporzionalità diretta e inversa e le disequazioni.



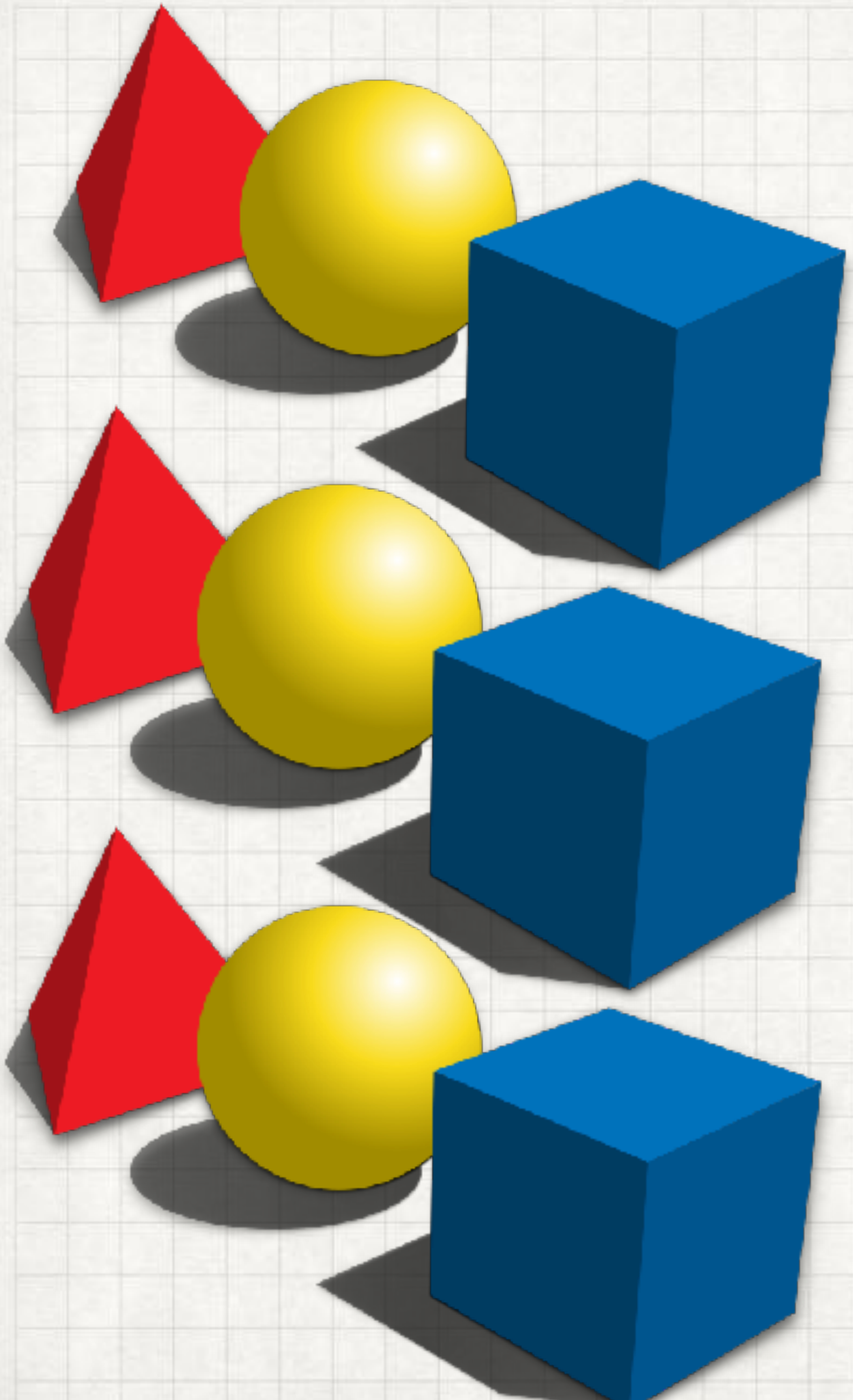
Lo studio di tutti questi argomenti avviene attraverso il concetto unificatore di ritmo, ed avviene su due livelli: uno immediato, l'altro un po' meno esplicito e che richiama il concetto di struttura sopra accennato.

«Il ritmo è numero, è misura esatta del tempo».

La pluralità delle situazioni assume particolare rilievo nella formazione dei concetti. Così, per esempio, la frazione viene presentata nella sua molteplicità di significati: come numero razionale, come misura (nelle battute), come rapporto tra grandezze variabili (figure musicali), come quoziente (fissato il tempo, si divide la figura iniziale).

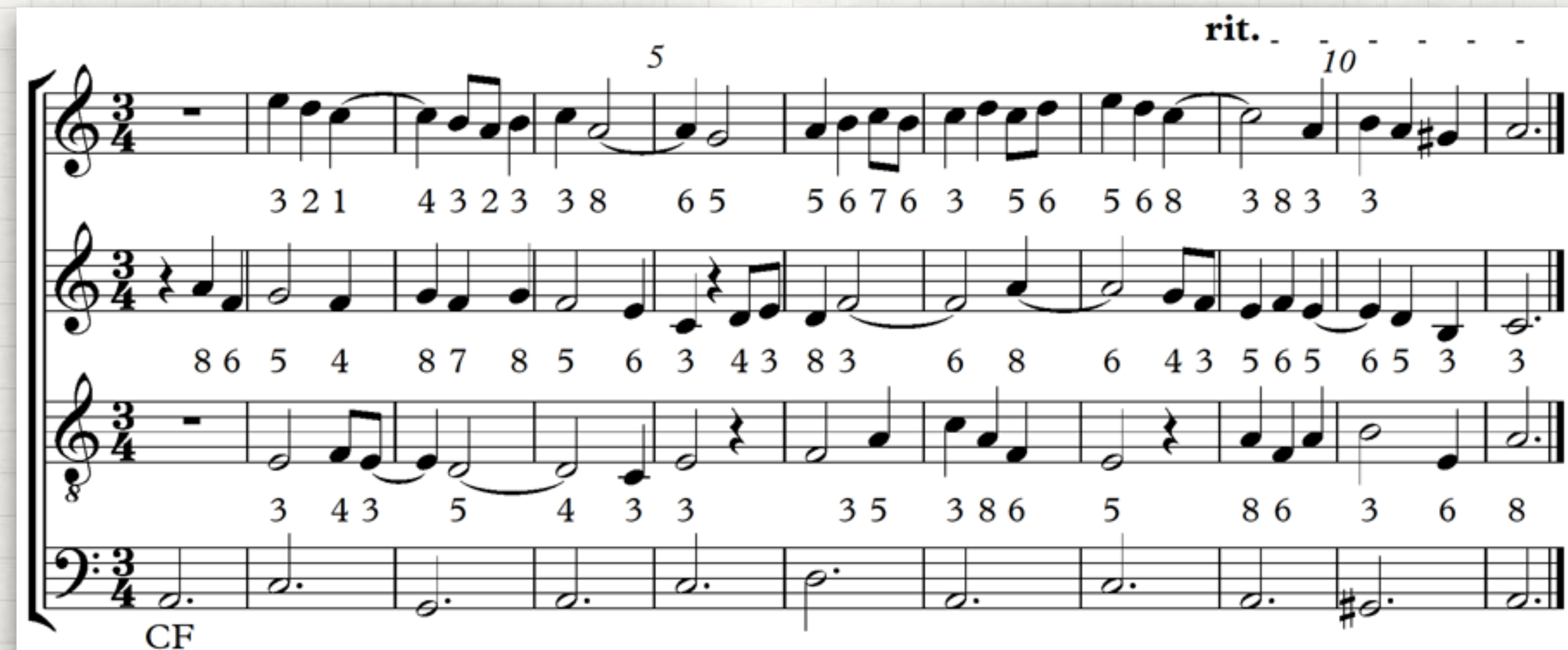


La competenza che si vuol far acquisire allo studente è il saper individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi, attraverso la progettazione di un percorso risolutivo e il passaggio da rappresentazioni in un determinato registro ad un altro, sia dal linguaggio naturale a quello algebrico (e viceversa), sia, operando su sequenze ritmiche, dal linguaggio musicale a quello algebrico (e viceversa).



L'ultima parte del testo tratta la geometria: gli enti fondamentali della geometria, le relazioni tra rette nel piano, i poligoni regolari, e alcune trasformazioni geometriche. Tutti questi concetti non sono estranei alla musica: si possono trovare elementi geometrici in moltissime composizioni di musica classica, da quelle di Ludwig Van Beethoven (1770-1827) a quelle di Johann Sebastian Bach (1685-1750). In particolare, i poligoni sono studiati in analogia con i gruppi di note, per esempio i triangoli con le terzine; questo permetterà di scrivere sequenze "geometrico-musicali", dove compaiono figure geometriche al posto di note musicali, o suonare strumenti a percussione "leggendo" poligoni.

Questi laboratori vogliono quindi far acquisire allo studente la capacità di confrontare e analizzare figure geometriche, inventare e comporre piccoli brani utilizzando trasformazioni geometriche e individuando invarianti e relazioni.



Frazioni in musica

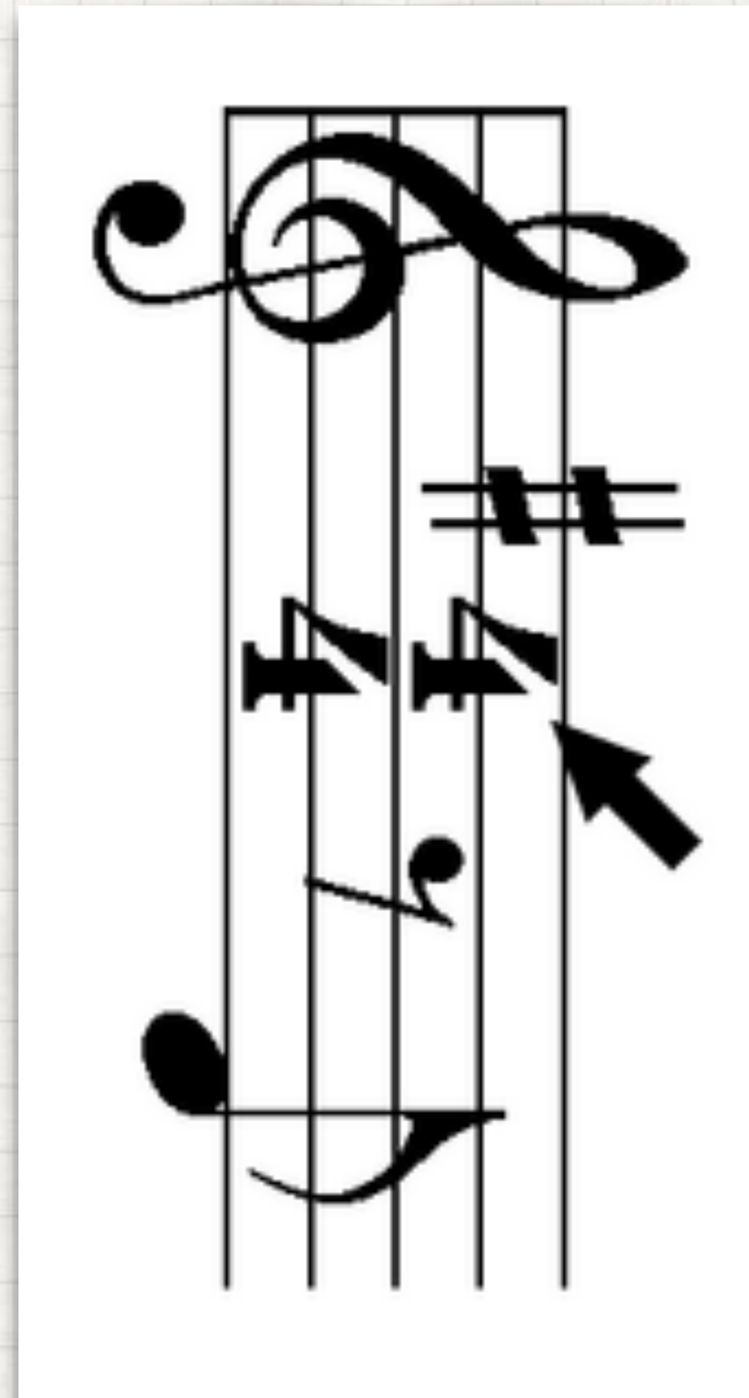
Esclusivamente per il presente argomento, si potrebbero proporre due approcci diversi, noi per motivi di tempo ne presenteremo uno che impegna gli studenti in attività di deduzione e di matematizzazione di concetti dell'ambito musicale.

Le “Frazioni in musica” costituiscono un prerequisito indispensabile alle successive attività, per cui è necessario partire da questi laboratori.

I laboratori sono due: il primo finalizzato alla comprensione dei rapporti che sussistono tra le varie figure ritmiche; il secondo alla comprensione dell’organizzazione del tempo musicale, attraverso il concetto di battuta (prenderemo in considerazione solo battute di metro 4/4).

Al termine di queste attività, avremo associato alle figure e figurazioni ritmiche delle frazioni e al loro succedersi nel tempo l’operazione di addizione.

Sperimenteremo inizialmente il concetto di frazione intesa come rapporto tra grandezze, poi come parte di un uno-tutto e infine mostreremo l’equivalenza tra frazioni.

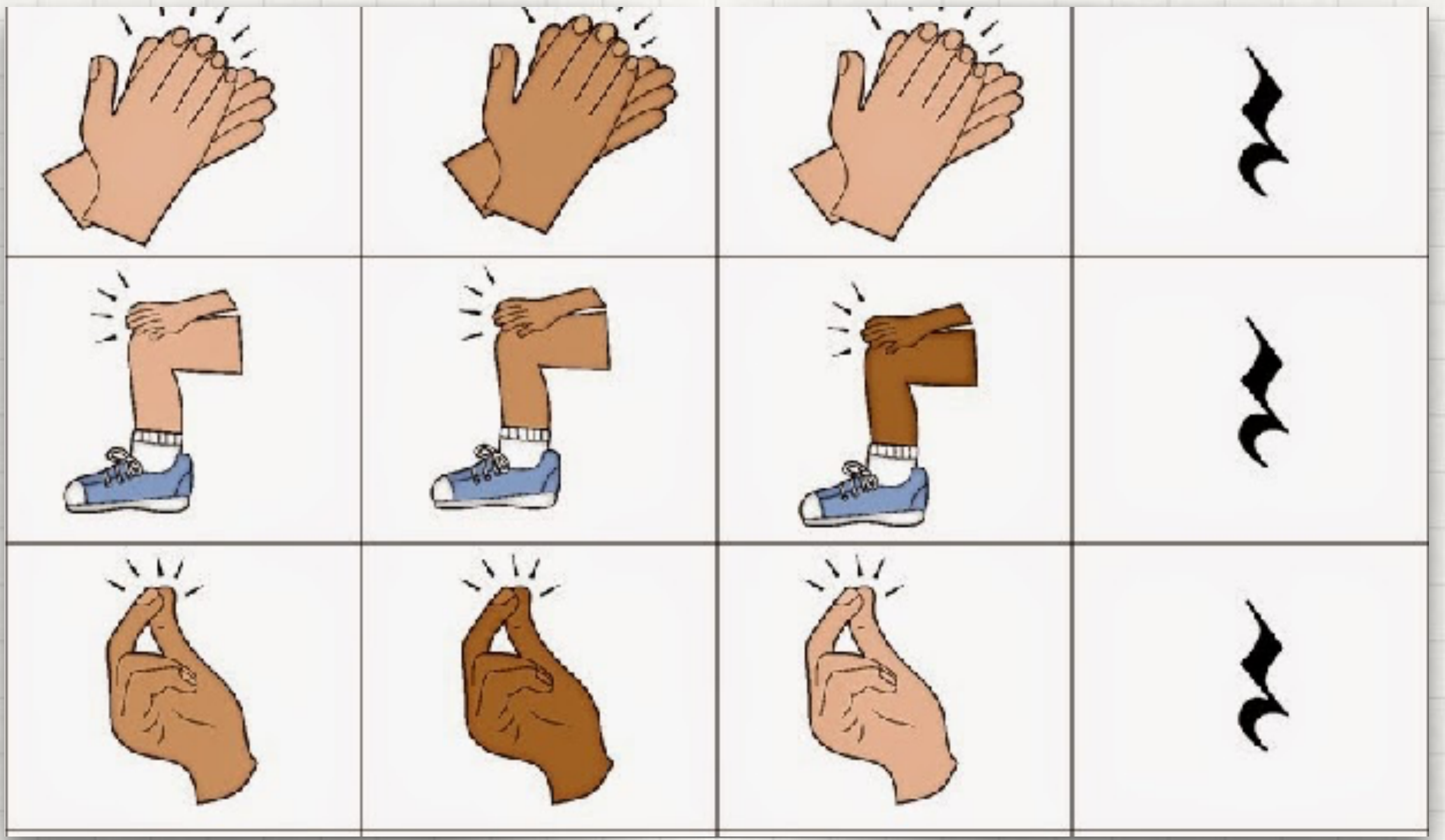


Fase I. Rapporti tra due figure ritmiche “consecutive”

Ascoltiamo una musica e battiamone il tempo (ripetere le note o scandire gli accenti).

Ciò che facciamo è battere dei colpi in modo ‘regolare’ e ciò avviene perché il nostro cervello sta compiendo delle operazioni matematiche.

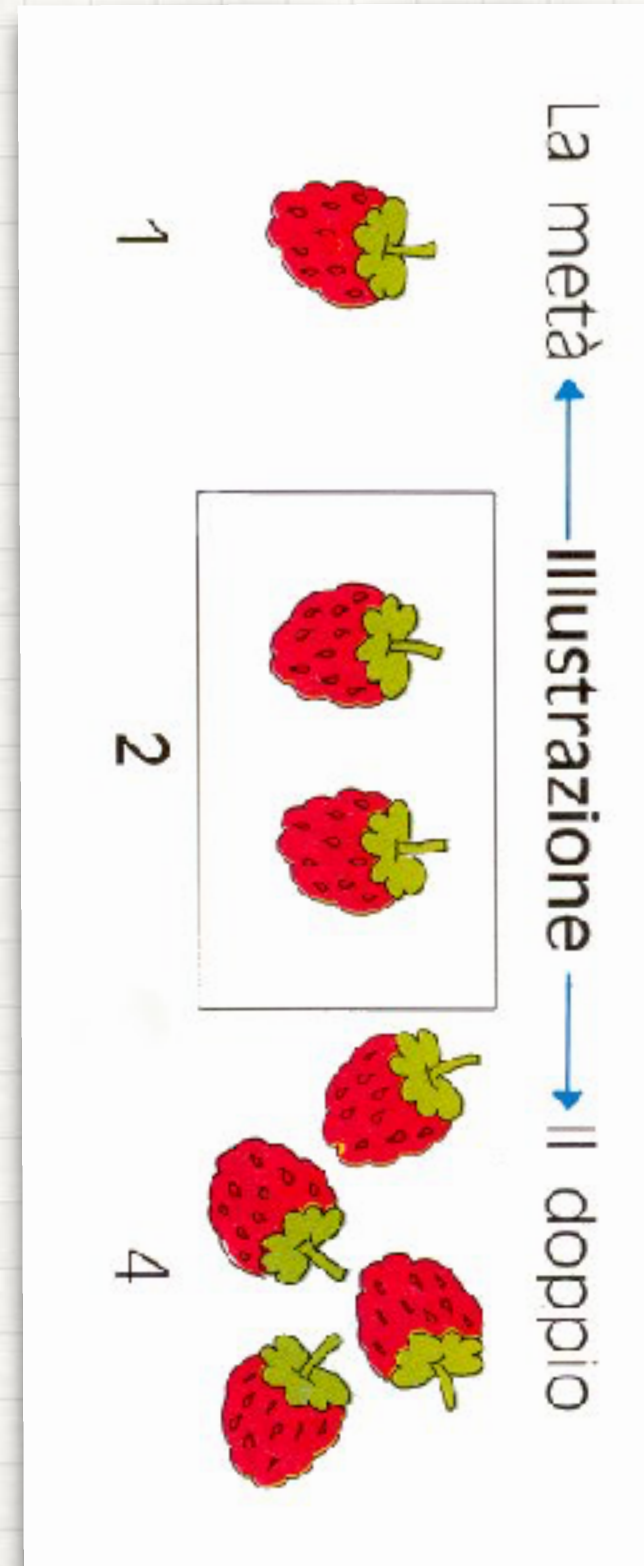
Vogliamo prendere in esame i rapporti tra le varie figure ritmiche: a tal fine, per avere un'idea di che cosa sia in musica un valore doppio o pari alla metà, proponiamo agli allievi un'attività idonea che usa le mani o altre parti del corpo come strumenti.



Battiamo con la mano destra su un piano dei colpi regolari, cioè in modo tale che tra uno e l’altro ci sia sempre il medesimo intervallo di tempo; con l’altra mano, la sinistra, facciamo battere nel medesimo intervallo due colpi, uguali tra loro.

Tale facoltà di prevedere gli accenti e di misurare i movimenti, ad esempio battendo le mani o con i passi, in sincronia tra loro, è una delle facoltà del nostro sistema nervoso centrale, le cui manifestazioni si possono notare fin dalle prime settimane di vita.

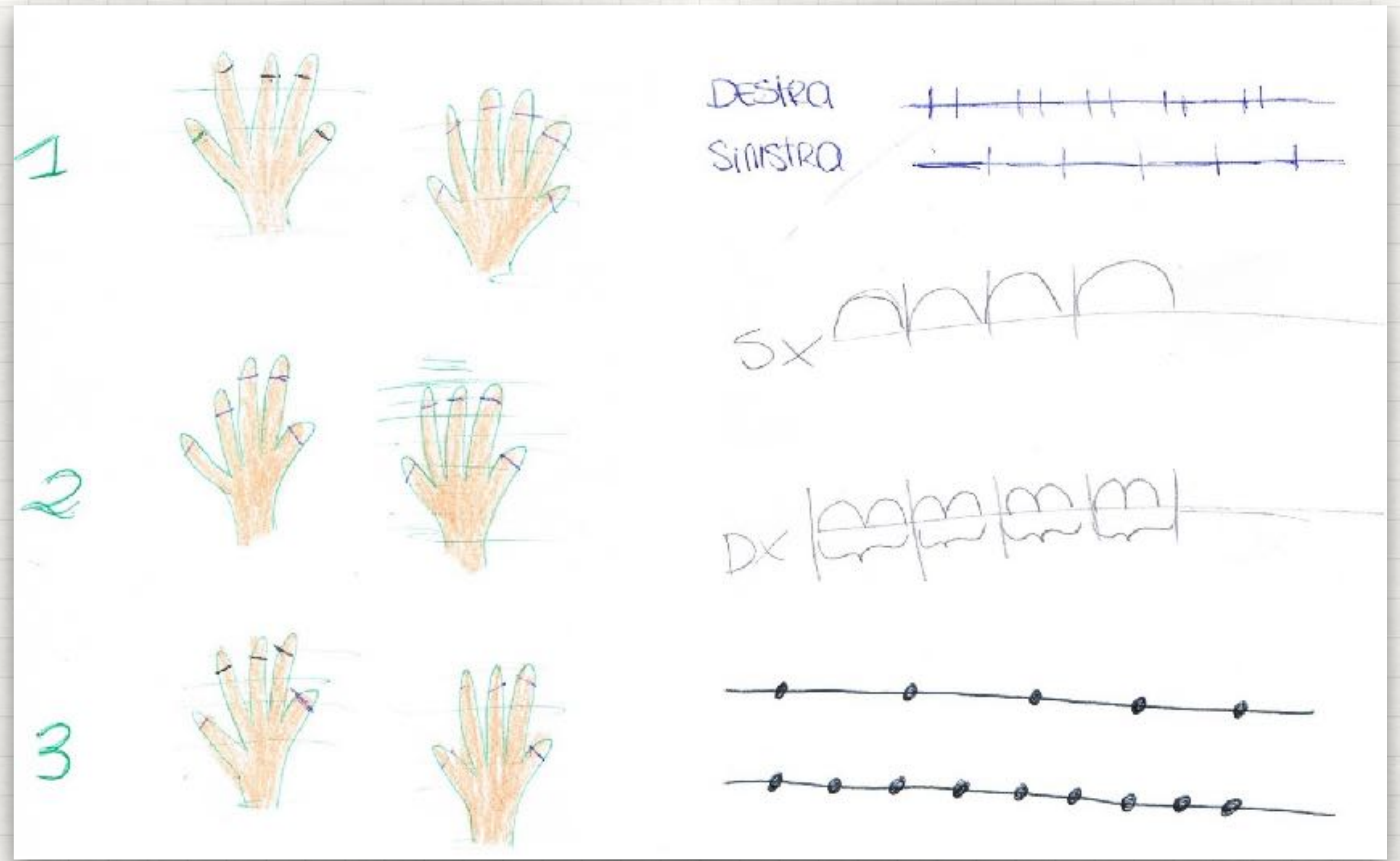
Così i movimenti delle nostre mani ci forniscono un’idea chiara di che cosa siano il doppio e la metà l’uno dell’altro; vale a dire che il concetto di doppio e di metà viene veicolato da un supporto di natura motoria e rinforzato da un segnale sonoro (il colpo della mano sul piano). Facciamolo anche con gli strumenti.



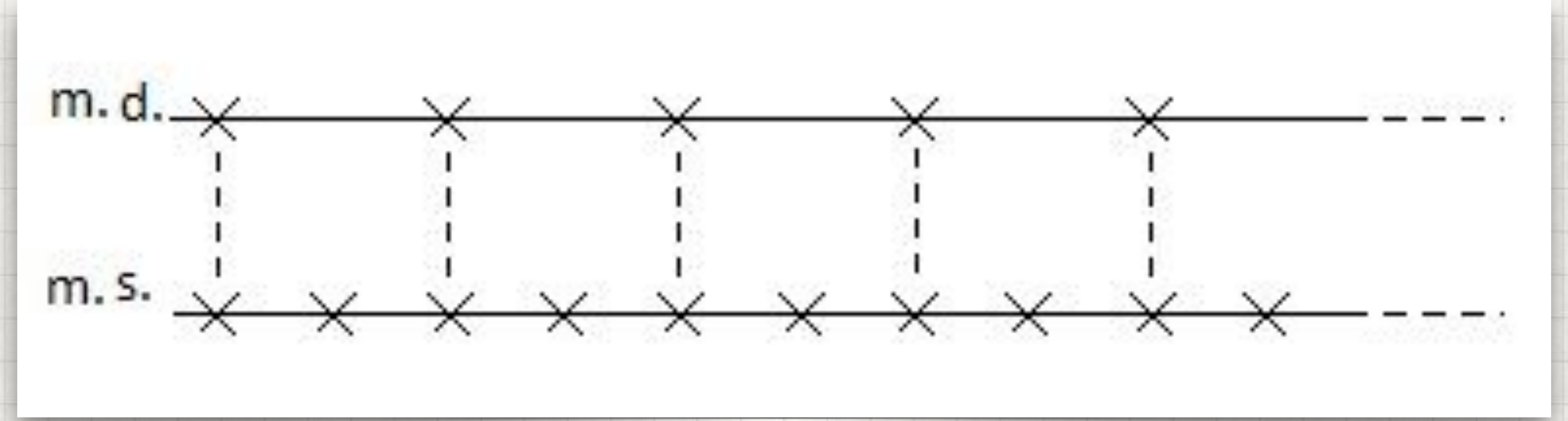
“Vogliamo rappresentare su una semiretta ciò che fa la mano destra e sull’altra ciò che fa la mano sinistra, come possiamo fare?”.

Attività di invenzione di una rappresentazione

Alcuni esempi di rappresentazione realizzate da studenti



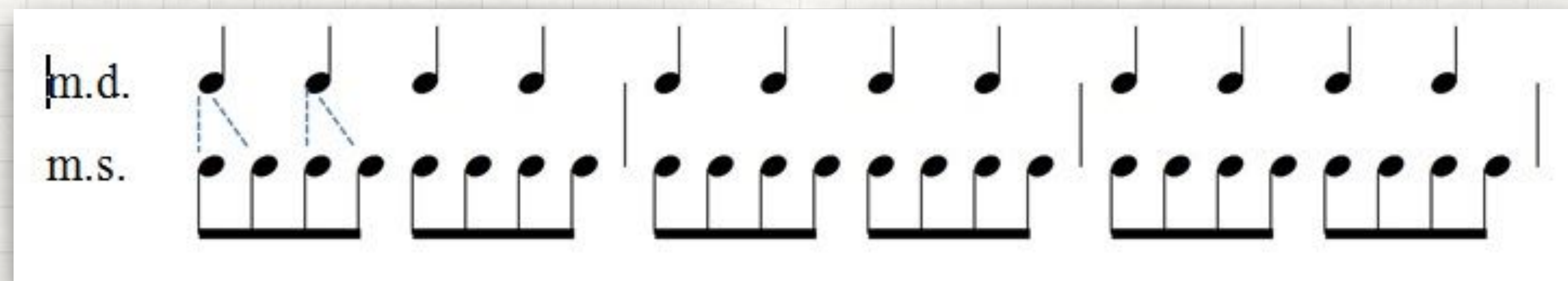
Il risultato potrebbe essere schematizzato nel seguente modo (naturalmente non va suggerito)

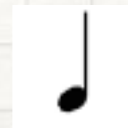


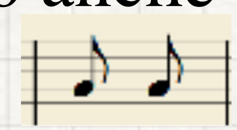
Quando gli studenti non cogliessero l'equidistanza dei colpi, il rapporto o l'allineamento, porremo loro domande del tipo: “Come abbiamo battuto la mano sinistra?

Questo vuol dire che abbiamo diviso il tempo in parti uguali oppure no? Ogni quanti colpi della mano sinistra la mano destra batte un colpo?

Noteremo infine con gli studenti che, se utilizziamo la simbologia musicale, possiamo scrivere il risultato della nostra attività motoria nel modo seguente

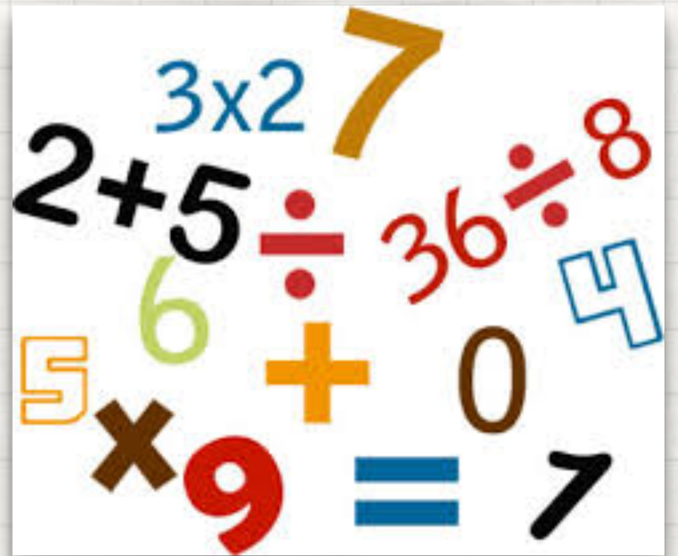


In relazione alla figura precedente cerchiamo di mettere in evidenza il rapporto di uno a due (e viceversa) tra i suoni prodotti dalle due mani utilizzando un linguaggio che richiamava quello delle frazioni e abbiamo spiegato le notazioni musicali:  la figura (che chiamiamo semiminima) equivale a  due crome.

La croma è una figura musicale che si scrive così  : la si può trovare in raggruppamenti di due o più figure o anche separatamente. Due crome separate si scrivono in questa forma 

Una semiminima equivale a 2 crome e, viceversa, una croma equivale a metà semiminima (o è un mezzo di)”.

Volendo arricchire il linguaggio, possiamo parlare di durata delle figure ritmiche, così abbiamo potuto affermare anche che una semiminima ha durata che è il doppio di una croma.



Cerchiamo ora di passare dalle rappresentazioni grafica, sonora, motoria e proposizionale (linguaggio naturale) a una rappresentazione nel registro aritmetico. Abbiamo chiesto:

Se ♩ = ♪♪ (una semiminima vale due crome, cioè ha un durata doppia della ♪), o anche ♩ = 2 ♪, allora una croma quanto vale rispetto alla semiminima? Ossia, la durata di una croma quanto è rispetto alla durata di una semiminima? ♪ = ? ♩

Per questa domanda accettiamo anche risposte nel linguaggio naturale, per esempio “la metà”, rimandando l’uso di rappresentazioni frazionarie nel registro semiotico dell’aritmetica al termine del laboratorio.

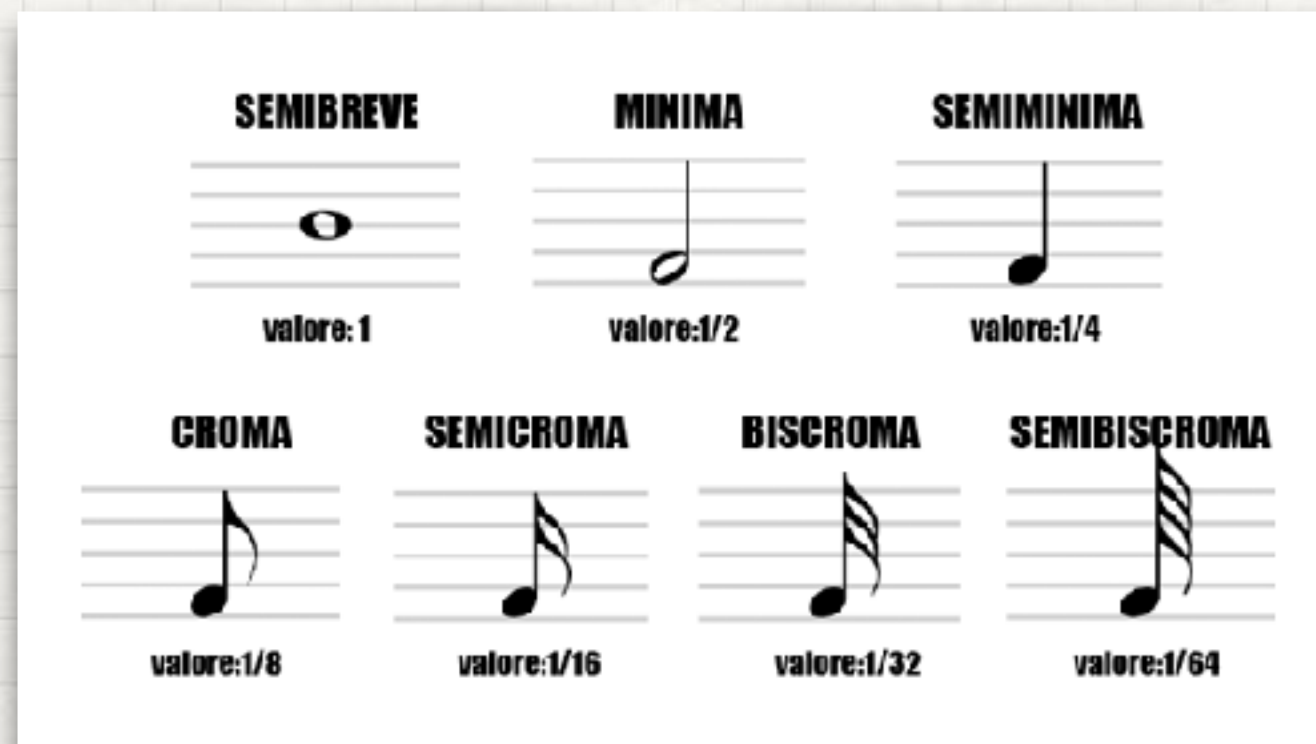
Se la risposta fornita dai ragazzi è quella corretta, cioè la metà, e se gli studenti sono in grado di scriverla con un linguaggio aritmetico, cioè attraverso una frazione $\frac{1}{2}$ (un mezzo), potrebbe significare che, attraverso il ragionamento deduttivo, si è passati dall’esperienza pratica al ragionamento astratto.

(ma questo va verificato analizzando quello che davvero è successo in classe).

Fase II. Generalizzazione

“Possiamo procedere generalizzando l’esempio proposto in precedenza. Chiediamo: “Possiamo costruire altre figure ritmiche raddoppiando o dimezzando la durata di quelle appena viste. Per esempio, se volessimo, battendo le mani o mediante un tamburo, produrre un suono che vale la metà di una croma, quanti colpi (o battiti) dovremmo eseguire nella durata di quella croma?”

Quando gli studenti hanno risposto correttamente (2 battiti) a questa domanda, abbiamo proseguito dicendo che la figura ritmica così ottenuta la indichiamo con questo simbolo e la chiamiamo semicroma.



A questo punto introduciamo questa canzone in stile jazz che aiuta i ragazzi a familiarizzare con i nomi tradizionali delle figure ritmiche

Semibreve è quella nota che quattro tempi cantiam
ma se due tempi la canti, tu, minima è il nome che le darai

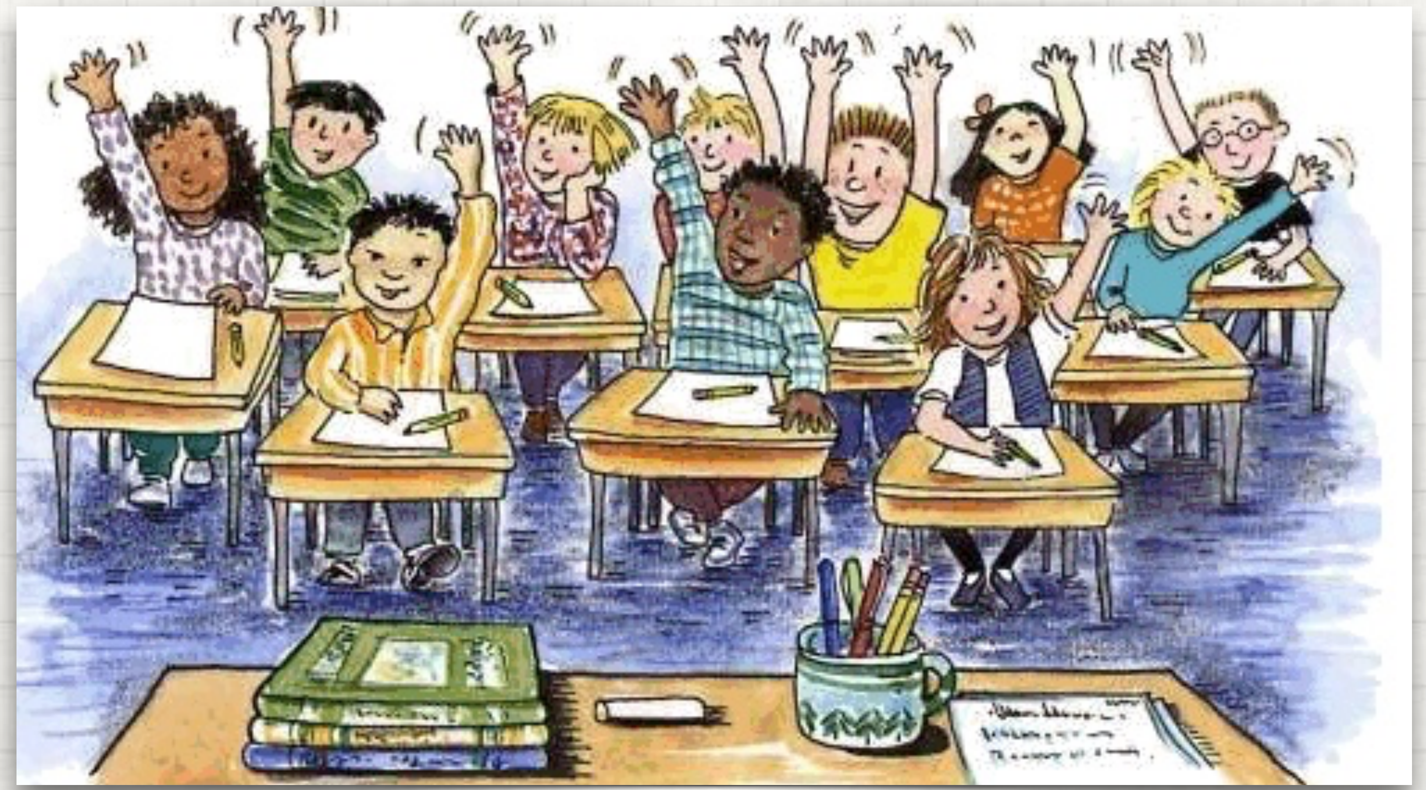
Se poi vale un solo tempo la semiminima è
se la semiminima dividerai allor crome tu troverai

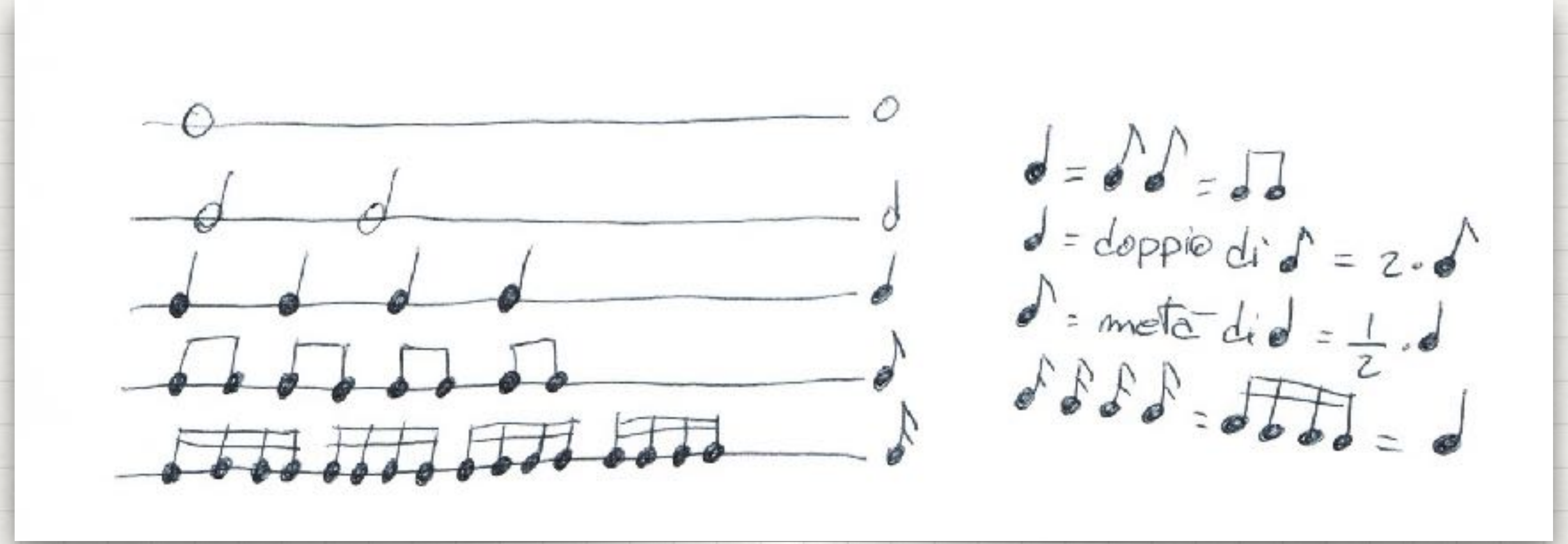
<u>Ritmo è dentro la musica come il cuor pulsa la forza del tempo che scorre</u>
<u>ritmo è dentro la musica il cuor conta e dividi con precision. (bis)</u>

Più veloce la semicroma ma la biscroma di più
per finire semibiscroma la nota che vola già non c'è più
semibiscroma già non c'è più

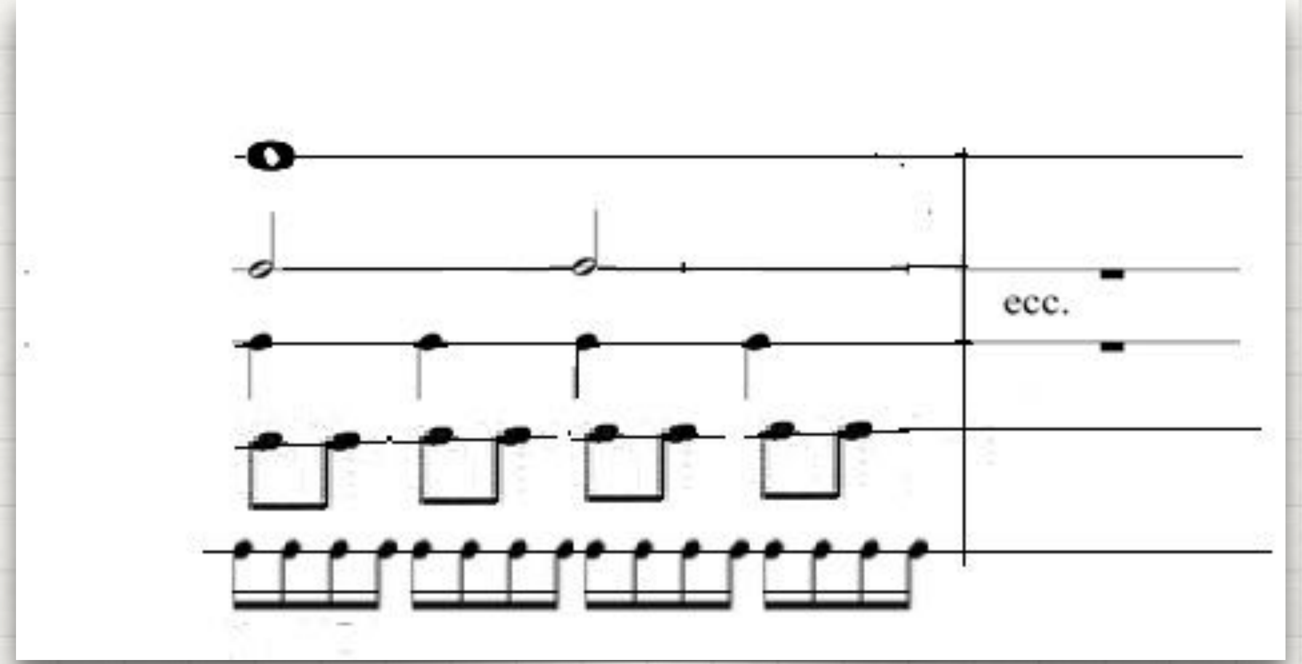
Poi poniamo un’altra domanda:
“È possibile ottenere un suono che dura il doppio di una semiminima? Se sì, quante semiminime devo contare per misurare con precisione questo suono? Ossia, quante semiminime ci stanno in questo suono?”.
Avendo ottenute le risposte corrette, cioè sì e 2, si può indurre che gli studenti hanno colto il meccanismo che sta dietro alla costruzione delle figure ritmiche e, generalizzando la rappresentazione di prima ne creeranno una più completa.”

Discuteremo la rappresentazione ed eseguiremo le figure ritmiche.





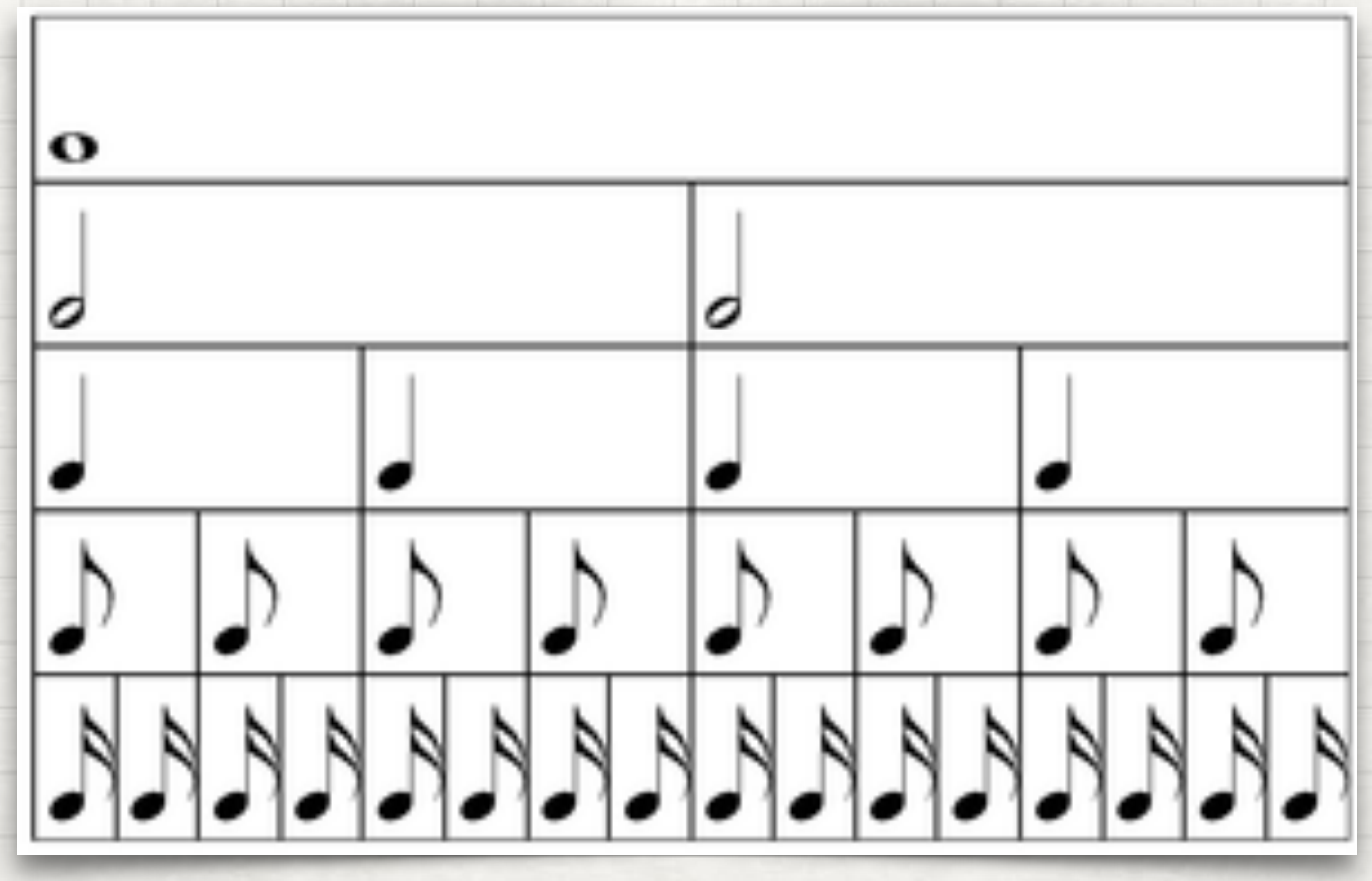
Ecco alcuni tentativi fatti dai ragazzi e la rappresentazione corretta



Fase III. Commento della rappresentazione

A questo punto possiamo esortare gli studenti a commentare la rappresentazione, cercando di utilizzare un linguaggio che richiama quello delle frazioni, ad esempio: una minima equivale a 4 crome, viceversa una croma equivale a 1/4 di minima.

Grazie alle attività realizzate (attraverso le quali abbiamo avuto esperienza di che cosa significhino in termini motori e acustici “doppio” e “metà”, dandone anche una rappresentazione grafica), gli studenti hanno dedotto una regolarità: due figure “consecutive” stanno tra loro nel medesimo rapporto di doppio/metà.

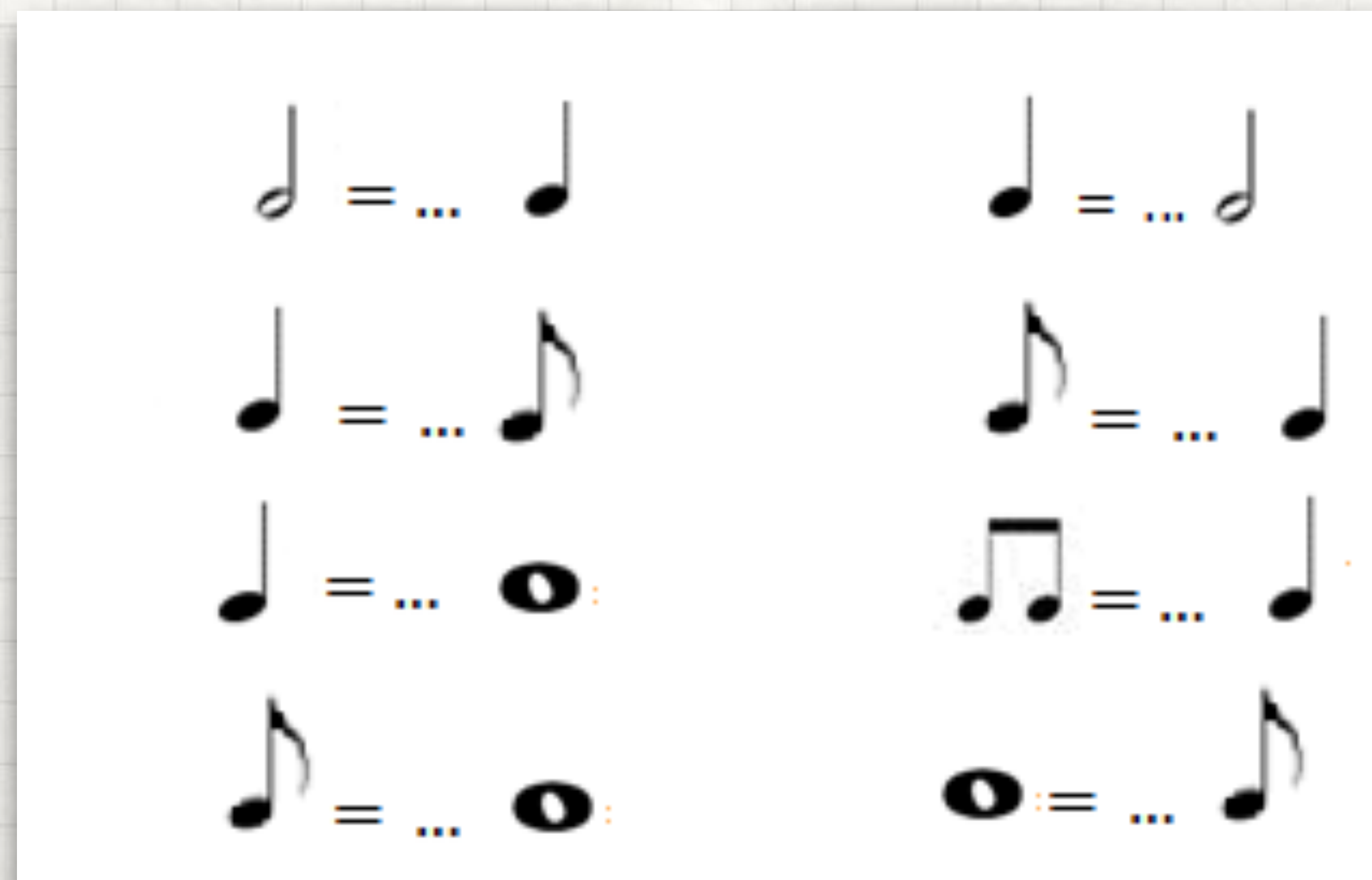


Successivamente assegnamo un compito da svolgere in classe in piccoli gruppi: passare da una rappresentazione semiotica espressa nel registro grafico a una espressa nel registro aritmetico e viceversa.

Illustriamo agli studenti il compito da eseguire con un esempio:

 = 4 

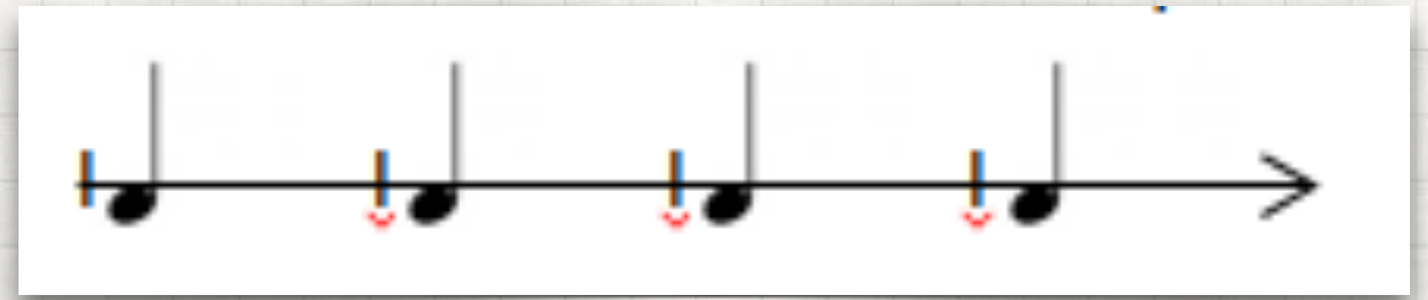
Una semibreve equivale a quattro semiminime. L'esempio usato coinvolge un numero naturale, lasciamo che siano gli studenti a usare le frazioni. Abbiamo in seguito proposto di svolgere la compilazione delle seguenti uguaglianze, mettendo il numero giusto al posto dei puntini.

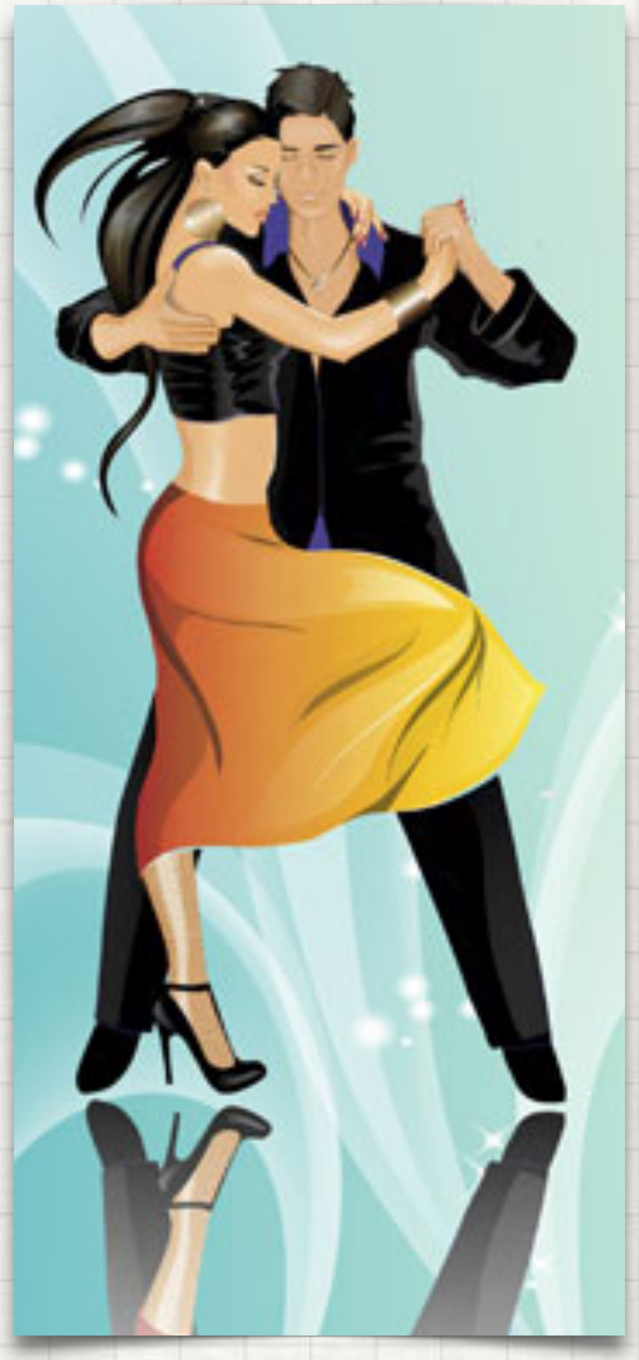


“La battuta e il valore delle figure ritmiche”

“Ascoltiamo questo brano Escualo di Astor Piazzolla; ora proviamo soltanto a capire dove, in quali punti della musica, viene più naturale, più comodo battere il piede per terra, schioccare le dita o fare un movimento cadenzato”.”

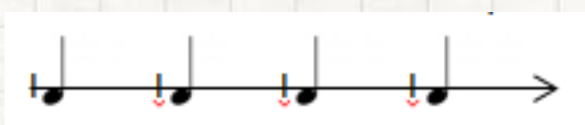
Dove si appoggia il battito?
Con i ragazzi stabiliamo che viene spontaneo battere in un punto e dopo di esso riusciamo a contare altri tre numeri fino a quattro appoggiando il battito sul primo dei quattro.
Se rappresentiamo questo con un segmento orientato diviso in 4 pezzetti mettendo un punto e poi una gamba su ognuno abbiamo la rappresentazione di una battuta



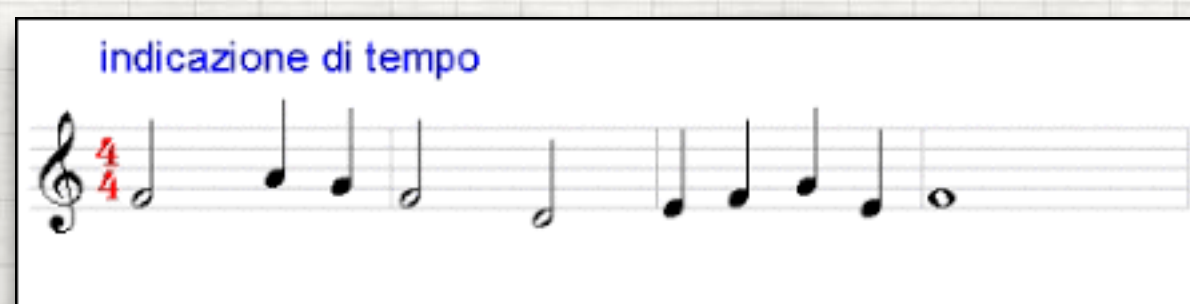


"Questa porzione di tempo che si ripete uguale per tutta la durata del brano la chiamiamo battuta, o misura, perché dà la misura dell'unità di base su cui viene costruito il brano; possiamo quindi considerarla come l'intero-totalità e rappresentarla con il numero 1."

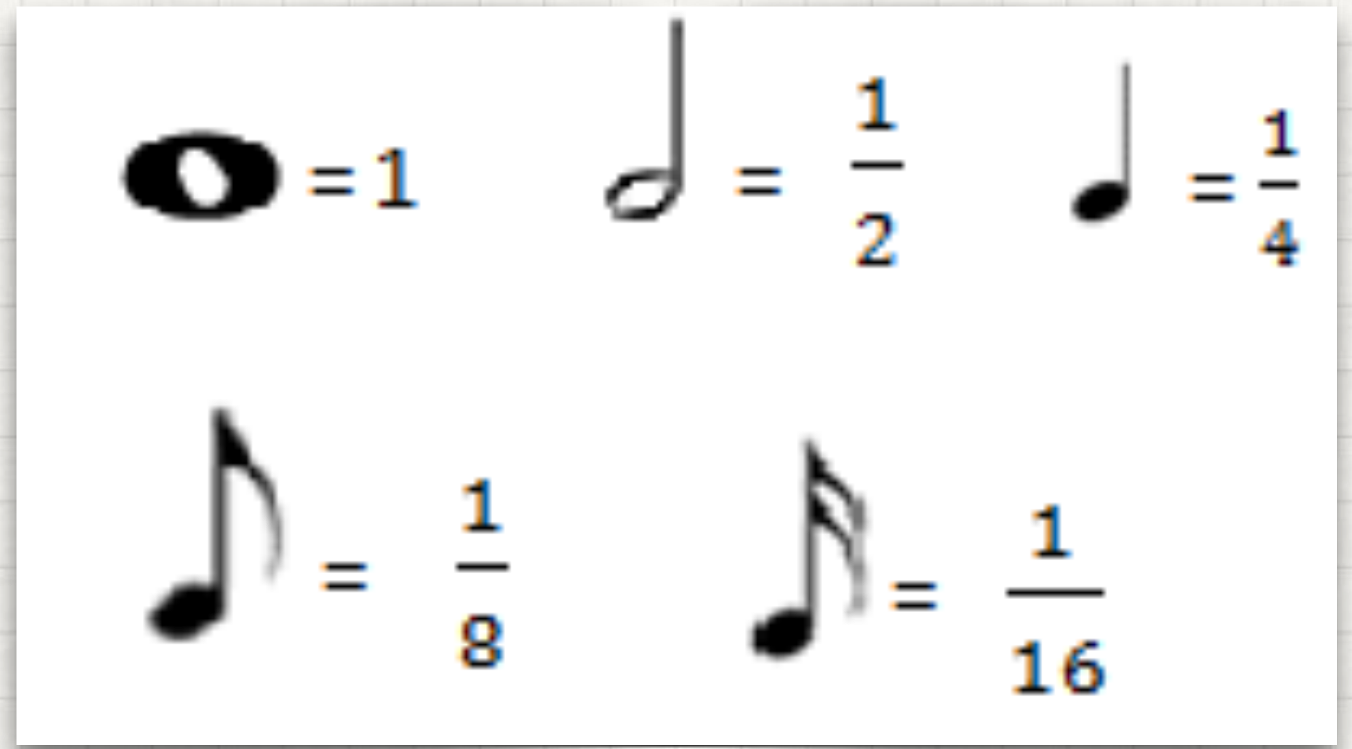
“Chiediamo, allora, agli studenti: “Quanto vale ogni suddivisione temporale rispetto alla durata della battuta?”, o anche, “Quanto vale una semiminima rispetto alla durata di una battuta?” “A queste domande gli studenti rispondono generalmente in modo corretto:1/4. Condividiamo quindi con gli studenti di attribuire alla semiminima la frazione 1/4 e la seguente scrittura:  = 1/4

La figura  rappresenta una battuta di 4/4

“Il numeratore dice in quante parti è stata suddivisa la porzione di tempo, il denominatore dice il valore delle figure o dei raggruppamenti ritmici che stanno in ciascuna suddivisione. Questo tipo di frazione, che può indicare differenti valori e parti, viene posta all’inizio di ciascun brano e viene detta indicazione di tempo.



Continuiamo ora a chiederci nell'unità/battuta quante suddivisioni uguali tra loro sono possibili ed associamole ad una frazione. Con la ricerca e le prove giungiamo ad associare le seguenti figure ritmiche alle frazioni.



"In generale, le frazioni si intendono in questo contesto come parte di un uno-tutto, di un intero, che è la semibreve.
Commentiamo nuovamente i rapporti tra le varie figure ritmiche, ma usando questa volta le frazioni: "La figura da 1/4 (o semplicemente il quarto) è la metà della figura da 1/2. Quindi quanto è, ad esempio, la metà di un quarto?".
Gli studenti rispondono in genere correttamente: un ottavo.
Tuttavia, quando si passa alla rappresentazione nel registro aritmetico, alcuni studenti sbagliano. Ad esempio, "quanto fa 1/2 : 2 ?" La prima risposta istintiva di alcuni studenti potrebbe essere 1! Richiamiamo le figure ritmiche per correggere"

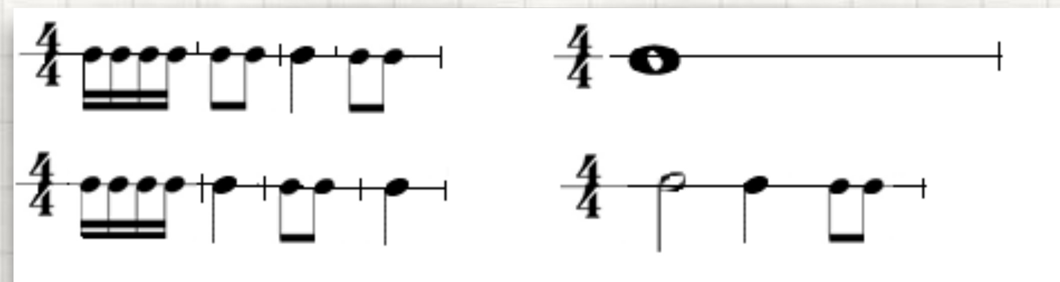
“Fase II: addizione di figure ritmiche”

“A questo punto vogliamo associare al succedersi nel tempo di figure ritmiche l’operazione di addizione. A tal fine, chiediamo agli studenti di riempire delle battute con figure ritmiche diverse e insieme le eseguiamo, battendo le mani o con i tamburi. Alcuni risultati potrebbero essere i seguenti:”

“Possiamo partire proprio da errori degli studenti (come nell’ultimo esempio sopra) per arrivare ad associare al succedersi nel tempo di figure ritmiche l’operazione di addizione tra frazioni”

“Queste attività hanno lo scopo di far riflettere gli allievi sull’associazione che hanno compiuto: il succedersi nel tempo di figure ritmiche con l’operazione di addizione tra le frazioni che le identificano. L’esperienza precedente, di compilazione di battute usando diverse figure ritmiche, ha lo scopo anche di dare agli studenti una prima alfabetizzazione nel campo musicale. Dalla definizione di battuta e metro, dai rapporti tra le figure ritmiche e le equivalenze tra frazioni, gli studenti sono indotti a “contare” in quarti e, facendo questo, compiono naturalmente un’operazione di addizione tra frazioni.”

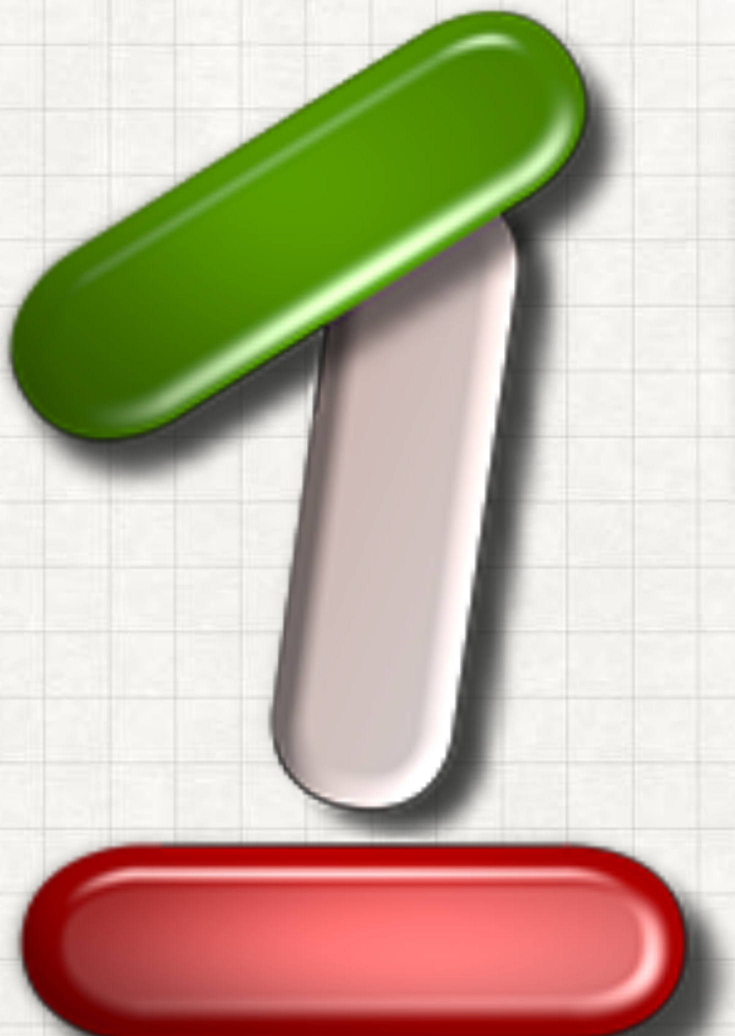
“Chiediamo poi agli studenti di fornire una rappresentazione aritmetica della battuta elaborata, condividendo il fatto di poterla rappresentare come un’addizione di frazioni, ad esempio, in riferimento alla prima battuta della diapositiva 40.

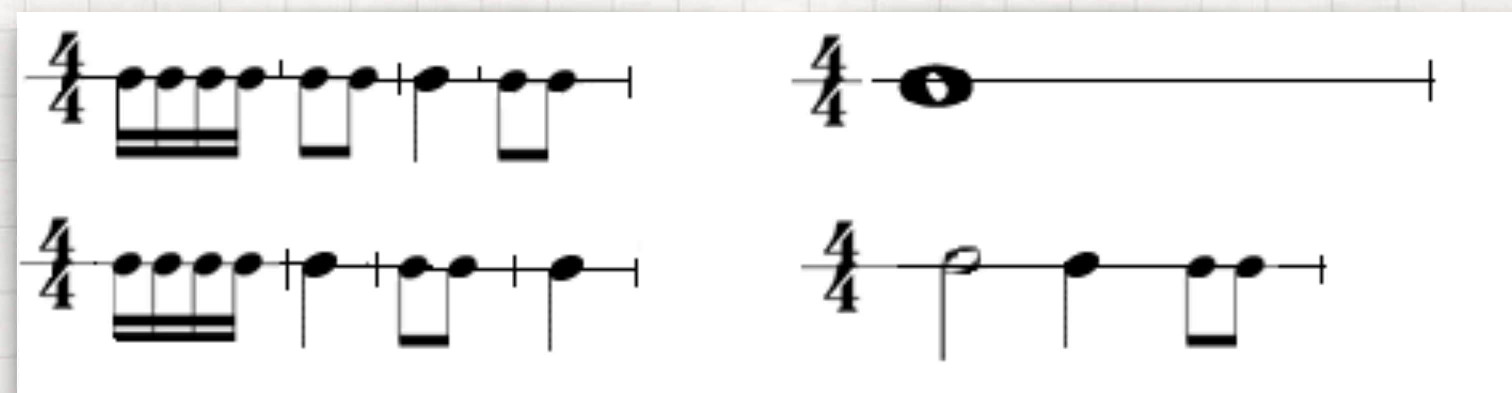


$$\frac{4}{16}+\frac{2}{8}+\frac{1}{4}+\frac{2}{8}$$

ma anche come una frazione, 4/4, o ancora in questo caso come un numero naturale, 1.
Abbiamo anche chiesto: “Qual è il risultato di questa piccola espressione?”.
Alcuni studenti potrebbero rispondere 1 o 4/4, basandosi sulla notazione musicale.
Altri potrebbero calcolare aritmeticamente l’espressione, senza provare neanche a connettere il risultato di questa con il contesto musicale.”

"Riprendendo gli esempi della diapositiva 40 e rappresentandoli in notazione aritmetica, possiamo mettere in evidenza come il risultato di tutte queste espressioni sia sempre 1; eseguendole su tamburi o con le mani abbiamo potuto osservare che però cambia il profilo ritmico delle stesse. Potremmo dire che tutte quelle battute costituiscono diversi "ritratti sonori" del numero 1."





"A questo punto proponiamo il passaggio inverso, presentando agli allievi un compito: inventare una espressione con le frazioni il cui risultato sia 2.
Questo passaggio è molto interessante: permette di osservare le strategie personali che mettono in atto gli studenti per risolvere la situazione proposta. Si potrebbe partire da un caso musicale, o comunque pensare alle frazioni come figure ritmiche.
In alternativa si potrebbe passare da una scrittura aritmetica, senza collegarla a quella musicale. In questi casi, rilevata la non eseguibilità musicale della scrittura è probabile un cambiamento di strategia, iniziando ad usare i concetti musicali per arrivare a una risposta aritmetica. Si può chiedere poi agli allievi di presentare al resto della classe l'espressione inventata e di spiegare come avevano proceduto."

DUE